

CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL FEBRERO DE 2013

PARTE PRACTICA

1. (10 puntos) Calcular, en caso de existir, el supremo e ínfimo del conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : |x - 1| < x + 5\}.$$

2. Sea $(a_n)_n$ la sucesión en \mathbb{R} definida por

$$a_n = \frac{\sin(1) + \sin(1/2) + \cdots + \sin(1/n)}{\ln(n+3)}.$$

(a) (10 puntos) Calcular el valor de $\lim_n a_n$. Aplicarlo para probar que la serie $\sum_n a_n$ no converge.

(b) (10 puntos) Probar que la serie $\sum_n \frac{a_n}{n^3}$ converge.

3. Sea $f : (-\frac{\pi}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x} & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^x - x - 3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(a) (10 puntos) Calcular las derivadas laterales de f en $x = 0$. ¿Es f derivable en $x = 0$?

(b) (10 puntos) Probar que f tiene exactamente una raíz real en $(1, \infty)$.

Ayuda. Tomar 2.7183 como valor del número e .

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

siendo

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos(xy)) \sin^3(y)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad f_2(x, y) = e^{x^2} \sin(y).$$

(a) (10 puntos) Estudiar la continuidad de f en \mathbb{R}^2 .

(b) (**10 puntos**) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de f_1 en el punto $(0, 0)$.

(c) (**10 puntos**) Utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 de f_2 en el punto adecuado, calcular un valor aproximado de $e^{1.21} \sin(1.01\pi)$.

NOTAS.

- La calificación de esta parte práctica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 8 preguntas de la misma.

- La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.